

Mecanique des structures

Methodes des elements finis

1 Formulation globale des equations d'équilibre

Theoreme des puissances virtuelles

2 Theoreme de l'énergie (E_p ; E_c)

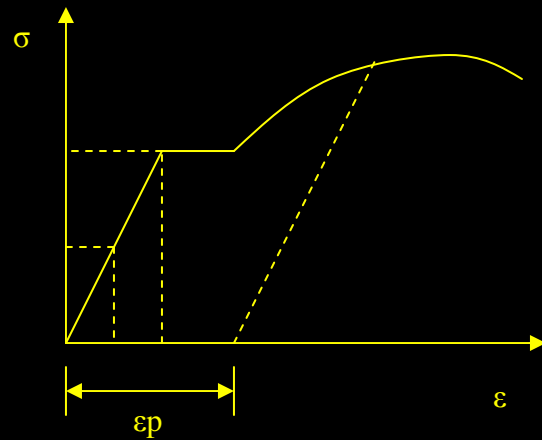
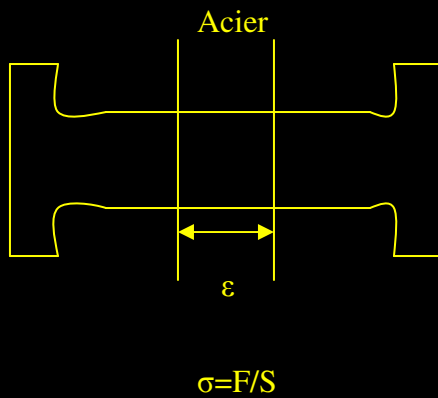
3 Introduction à la methode des elements finis

(1D, 2D, (3D), Iso)

4 Theoreme des plaques

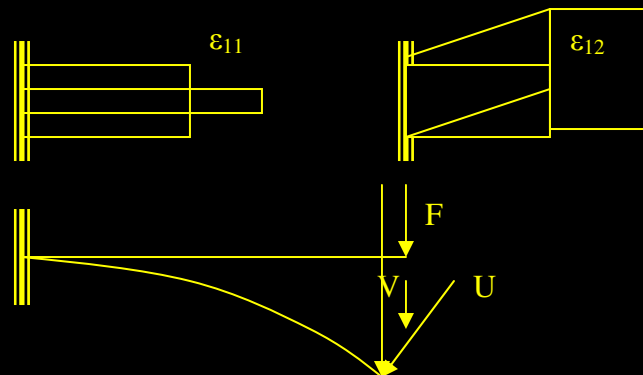
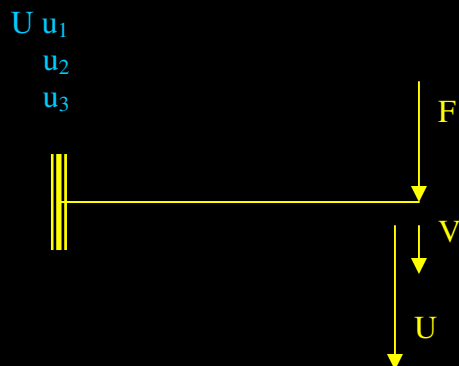
Introduction

Elasticité linéaire (H.P.P.) (petites deformations , petits déplacements)

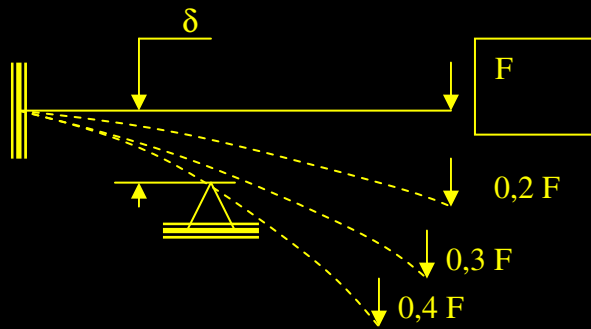


$$E(u) = 1/2 (\text{grad } u + \text{grad } u^T)$$

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (U_{i,j} + U_{j,i})$$



Remarque :



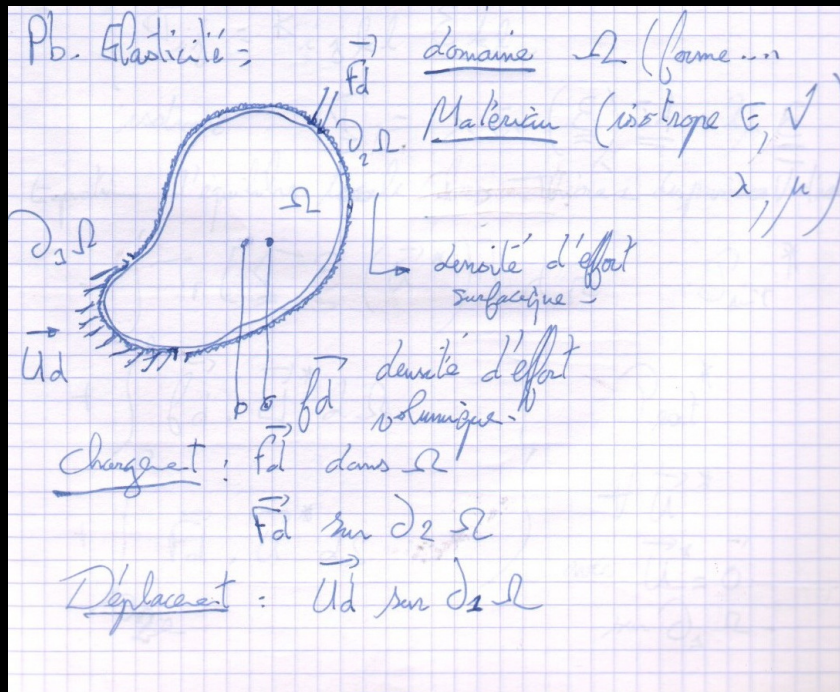
-Contact unilateral

-Pb non lineaire

-Calcul incremental

=>1 Formulation globale de équations d'équilibre

Pb d'élasticité



Trouver les champs de déplacement $U(M)$ et de continuité $\sigma(M)$ tels que

- Equations de liaison $u = u_d$ sur $\partial_1 \Omega$
- Equations d'équilibre $\text{div } C + f_d = 0$ dans Ω

$$\sigma n = fd \text{ sur } \partial \Omega$$

- **Relations de comportement**

$$\sigma = K \varepsilon$$

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\text{isotrope : } \sigma = \lambda \text{Cr}(\varepsilon) \text{Id} + 2\mu \varepsilon$$

Equation d'équilibre locale $\Leftrightarrow$ theoreme des puissances virtuelles

$$-\int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(u^*)] d\Omega - \int_{\Omega} P \text{int}^* + \int_{\Omega} fd U^* d\Omega + \int_{\partial \Omega} Fd u^* dS = 0 \quad (P \text{ ext}^* \quad \forall U^* \text{ avec } u^*=0 \text{ sur } \partial_1 \Omega)$$

Equations locales

$$\text{Dir } \sigma + fd = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma n = Fd \text{ sur } \partial_2 \Omega$$

demonstration

$$\int_{\Omega} (\text{div } \sigma + fd) u^* d\Omega = 0$$

$$A=0$$

$$A.B=0 \text{ en tout } M \quad \forall B$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \sigma u^* d\Omega + \int_{\Omega} fd u^* d\Omega = 0 \quad , \quad \int_{\Omega} A.B d\Omega = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Div } \sigma . U &= (\sigma_{ij,j} U_i) - \sigma_{ij} U_{i,j} \\ &= (\sigma_{ji} U_i)_{,j} - \frac{1}{2} (\sigma_{ij} U_{i,j} + \sigma_{ji} U_{j,i}) \\ &= \text{div}(\sigma . U) - \sigma_{ij} \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \\ &= \text{div}(\sigma U) - \text{Tr}[\sigma \varepsilon] \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

$$\text{Div } \sigma . U = \text{div}(\sigma U) - \text{Tr}[\sigma \varepsilon(u)]$$

- $\Rightarrow \int_{\Omega} \text{div}(\sigma U^*) d\Omega - \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(U^*)] d\Omega + \int_{\Omega} fd U^* d\Omega = 0$
 $\int_{\Omega} \text{div}(\sigma U^*) d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} U_i)_{,i} d\Omega = \int_{\partial \Omega} \sigma_{ij} U_j n_i d\Omega$
 $\int_{\Omega} \phi_{1,i} = \int_{\partial \Omega} \phi_1 n_i$

Transformation d'integrales

$$\begin{aligned} &\int_{\partial \Omega} \sigma_{ij} n_i U_j dS \\ &\int_{\partial \Omega} \sigma n U dS \end{aligned}$$

- $\Rightarrow - \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(u^*)] d\Omega + \int_{\Omega} fd U^* d\Omega + \int_{\partial \Omega} \sigma n U^* dS = 0 \quad \forall u^*$
 $\partial \Omega = \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega$

$$0 = - \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(u^*)] d\Omega + \int_{\Omega} fd U^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} Fd U^* dS + \int_{\partial_1 \Omega} \sigma n U_j dS = 0 \text{ si } u^*=0 \text{ sur } \partial_1 \Omega$$

Remarque

1 Théorème des puissances virtuelles
Base des méthodes d'approximation

2 Dynamique ($\text{div } \sigma + f d = \rho \gamma$) v^*

$$\text{T.P.V.} \quad P_{\text{int}}^* + P_{\text{ext}}^* = \Omega \int \rho \gamma \cdot V d\Omega = P_{\text{acc}}^*$$

2 Relation de comportement

$$\Sigma = K \varepsilon (u)$$

$$\varepsilon_{ij} = K_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

ex :

$$\sigma_{11} = K_{1112} \varepsilon_{11} + K_{1122} \varepsilon_{22} + K_{1133} \varepsilon_{33} + K_{1112} \varepsilon_{12} + K_{1113} \varepsilon_{13} + K_{1123} \varepsilon_{23} + K_{1121} \varepsilon_{21} + K_{1131} \varepsilon_{31} + K_{1132} \varepsilon_{32}$$

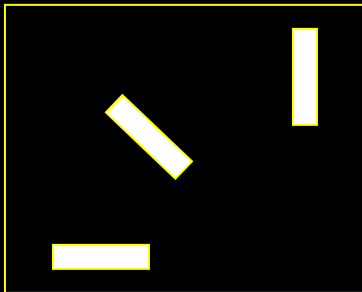
inversement :

$$\varepsilon = K^{-1} \sigma$$

K^{-1} : matrice de souplesse



Matériau isotrope :



2 coefficients indépendants

$$\sigma = \lambda \text{tr} [\varepsilon] \text{id} + 2 \mu \varepsilon$$

λ et μ : Coefficient de Lamé

Inversement

$$\text{Tr} [\sigma] = \lambda \text{Tr} [\varepsilon] 3 + 2 \mu \text{Tr} [\varepsilon]$$

$$\text{Tr} [\sigma] = (3\lambda + 2\mu) \text{Tr} [\varepsilon]$$

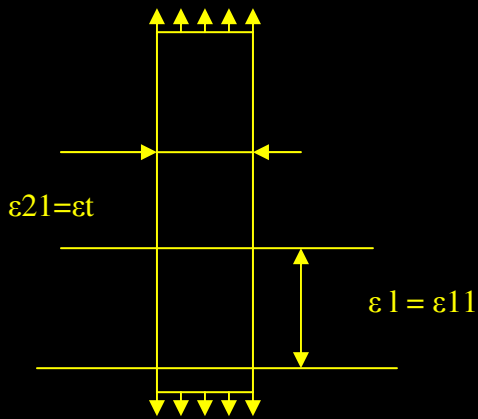
$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} [\sigma - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \text{Tr} [\sigma] \text{Id}]$$

$$\varepsilon = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr} [\sigma] \text{Id}$$

E : module d'young

ν : coefficient de poisson

Essai



$$\sigma : \begin{matrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\varepsilon_{11} = ((1 + \nu) / E) \cdot \sigma_{11} - (\nu / E) \sigma_{11} = \sigma_{11} / E \Rightarrow E = \sigma_{11} / \varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon_{22} = -(\nu / E) \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} \Rightarrow \nu = -\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11}$$

$$\text{On a : } \varepsilon_{11} = ((1 + \nu) / E) \sigma_{12} = \sigma_{12} / 2\mu \Rightarrow \mu = E / (2(1 + \nu))$$

$$\varepsilon = \lambda \text{Tr} [\varepsilon] \text{Id} + 2\mu \varepsilon$$

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12}$$

3 Theoreme de l'energie

1 definition des champs

- Champ de déplacement U cinetiquement admissible

$$U = U_d \text{ sur } \partial_1 \Omega$$

- Champ de déplacement U_0 Cinematiquement Admissible à 0

$$U_0 = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega$$

- Champ de contrainte σ Statiquement admissible

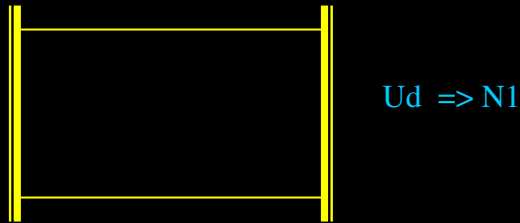
$$\text{Div } \sigma + f_d = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma n = F_d \text{ sur } \partial_2 \Omega$$

- Champ de contrainte σ_0 statiquement admissible à zero

(auto équilibré) $\text{div } \sigma_o = 0$ dans Ω
 $\Sigma \sigma_o n = 0$ sur $\partial\Omega$

Ex :



$$\sigma_o = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cte & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Theoreme de l'énergie potentielle

Parmi tous les champs de déplacement U

Le champ solution U_s minimise l'énergie Potentielle

$$E_p(U_s) < E_p(U) \quad \forall U \in A$$

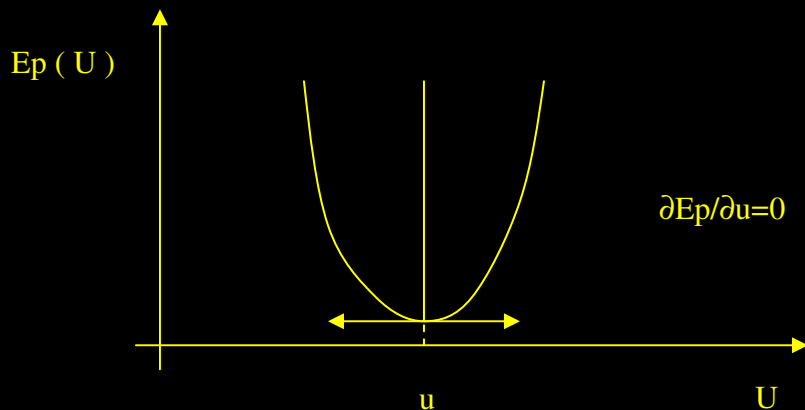
Où :

$$E_p(U) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr} [\varepsilon(U) K \varepsilon(U)] d\Omega}_{\text{Energies de deformation En terme de déplacement}} - \underbrace{\int_{\Omega} f d U d\Omega - \int_{\partial\Omega} F d U dS}_{\text{Travail des efforts donnés dans le champ de déplacement U}}$$

Remarque

Construction d'une approximation $U_n = \sum_{i=1}^n a_i U_i$
 U_i : fonction de base

La meilleure approximation minimise l' $E_p(U_n)$



$$\frac{\partial E_p(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial E_p(a_1, \dots)}{\partial a_2} = 0$$

$$\partial E_p / \partial a_n = 0$$

3 Theoreme de l'energie complementaire

Parmi tous les champs de contrainte $\sigma \in S_A$

$$E_c(\sigma_s) < E_c(\sigma) \quad \forall \sigma \in S_A$$

Où $E_c(\sigma) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma K^{-1} \sigma] d\Omega - \int_{\partial 1 \Omega} \sigma_n U dS$

$$\text{div } \sigma + f d = 0 \text{ dans } \Omega$$

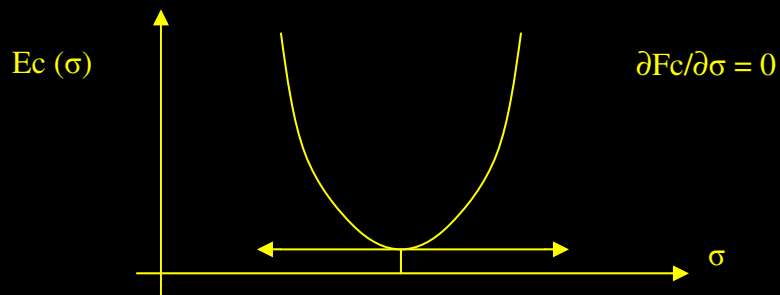
$$\sigma n = f d \text{ sur } \partial 2 \Omega$$

$$E_c(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma K^{-1} \sigma] d\Omega - \int_{\partial 1 \Omega} \sigma_n U dS$$

Approximation

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \in S_A$$

Meilleure approximation σ_n minimise l' $E_c(\sigma_n)$



Ex : Rdm

R
M
(X,Y,M)

$$\partial E_c(R,M) / \partial X = 0$$

$$\partial E_c(R,M) / \partial Y = 0$$

$$\partial E_c / \partial M = 0$$

Nom du document : calcul de structure.doc
Répertoire : G:\docu\etudes\cours maitrise\calcul de structure
Modèle : E:\Documents and Settings\moi\Application
Data\Microsoft\Modèles\Normal.dot
Titre :
Sujet :
Auteur : vaux
Mots clés :
Commentaires :
Date de création : 25/08/2004 17:38:00
N° de révision : 2
Dernier enregistr. le : 25/08/2004 20:30:00
Dernier enregistrement par : vaux
Temps total d'édition : 182 Minutes
Dernière impression sur : 10/01/2006 19:19:00
Tel qu'à la dernière impression
Nombre de pages : 7
Nombre de mots : 803 (approx.)
Nombre de caractères : 4 417 (approx.)